18-7-18

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
EXAMEN FINAL 18-07-2018

Apellido y Nombres:

Legajo:

1	2	3	4	5	NOTA

Condición mínima de aprobación: 50% del examen correcto.

1) Se venden gaseosas con un contenido nominal de 2 litros pero el contenido real es una v.a. Normal X. En una oficina de Defensa del Consumidor se plantea la necesidad de estimar por intervalo la media de X con un error o precisión de 0.02 litros y con un nivel de confianza del 98 %. Hay información de que el desvío estándar de X es σ_x=0.04 litros.

a) ¿Qué tamaño de muestra se debe elegir para realizar la estimación?

b) Si en una muestra de tamaño 25 el promedio del contenido resultó ser 1,99 litros, ¿cuál sería el intervalo de confianza del 98%? Interprete el intervalo obtenido

2) La duración en horas de cierto componente eléctrico es una variable aleatoria cuya distribución es exponencial con una media de 48 horas.

a) Halle la probabilidad de que un componente eléctrico dure más de 50 horas.

b) Un equipo posee 5 de estos componentes que trabajan independientemente. El equipo funciona mientras por lo menos uno de los 5 componentes funcione, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo funcione más de 50 horas?.

3) Una de las consecuencias de los faros mal alineados en los automóviles puede ser un efecto reflejante en las autopistas. Se piensa que más del 50% de los automóviles en circulación tienen faros mal alineados. Si esta afirmación puede sustentarse estadísticamente, se pondrá en marcha un programa de inspección más intenso. Se seleccionan una muestra aleatoria de 200 automóviles y se encuentran 120 con los faros mal alineados.

a) Plantee un test de nivel de 0.05 si se busca confirmar la necesidad de un programa de inspección más intenso, indicando las hipótesis, el estadístico del test con su distribución y la región crítica.

b) En base a lo observado en dicha muestra, ¿encuentra evidencias para iniciar un programa de inspección más intenso? Encuentre el p valor de su conclusión.

4) a) Concepto de coeficiente de determinación en un modelo de regresión lineal. Si se obtuviera un valor del mismo igual a 0. 72 ¿cómo lo intepretaría?

b) ¿Para qué sirve realizar el test de hipótesis para la pendiente de la recta de regresión en un modelo lineal?

5) a) Enunciado del Teorema Centarl del Limite. Mencione una aplicación del teorema en la cual la variable poblacional no tenga distribucion normal.

b) Concepto de estimador insesgado de un parámetro poblacional.

Final PyE 18-7-18

① Se venden gaseosas con un contenido nominal de 2 litros pero el contenido real es una v.a. Normal X. En una oficina de Defensa al Consumidor se plantea la necesidad de estimar, por intervalo la media de X con un error o precisión de 0,02 litros y con un nivel de confianza del 98%. Hay información de que el desvío estándar de X es de $\sigma_X = 0{,}04$ litros

a) ¿Qué tamaño de muestra se debe elegir para realizar la estimación?

error = 0,02 → longitud del intervalo = 0,04

$\sigma_X = 0{,}04$

$n = ?$

$\alpha = 0{,}02$

$$IC_{0{,}98}(\mu) = \left[\bar{X} - z_{0{,}99}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + z_{0{,}99}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$z_{0{,}99} = 2{,}327 \rightarrow IC_{0{,}98}(\mu) = \left[\bar{X} - \underbrace{2{,}327 \cdot \frac{0{,}04}{\sqrt{n}}}_{0{,}02} , \bar{X} + 2{,}327 \times \frac{0{,}04}{\sqrt{n}}\right]$$

$$2{,}327 \times \frac{0{,}04}{\sqrt{n}} = 0{,}02 \rightarrow \sqrt{n} = 2{,}327 \times \frac{0{,}04}{0{,}02} = \sqrt{n} = 4{,}654 \rightarrow n = 21{,}6 \rightarrow \boxed{n = 22}$$

b) Si en un tamaño de muestra 25 el promedio del contenido resultó ser 1,99 litros ¿cuál sería el intervalo de confianza del 98%? Interprete el ~~valor~~ intervalo obtenido.

$n = 25$

$\alpha = 0{,}02$

$\bar{X} = 1{,}99$

$\sigma = 0{,}04$

$z_{0{,}99} = 2{,}327$

$$IC_{0{,}98}(\mu) = \left[1{,}99 - 2{,}327 \cdot \frac{0{,}04}{5} ; 1{,}99 + 2{,}327 \times \frac{0{,}04}{5}\right].$$

$$\boxed{IC_{0{,}98}(\mu) = [1{,}971 ; 2{,}009]}$$

Existe un 98% de probabilidad que el μ verdadero se encuentre en este intervalo.

---

② La duración en horas de cierto componente eléctrico es una v.a cuya distribución es exponencial con una media de 48 horas

a) Halle la prob. de que un componente eléctrico dure más de 50 horas

$$X \sim \mathcal{E}(1/48) \rightarrow P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - 1 + e^{-\frac{50}{48}} = \boxed{0{,}35 = P(X > 50)}$$

b) Un equipo posee 5 de estos componentes que trabajan indep. El equipo funciona mientras por lo menos 1 de los 5 comp. funcione ¿cuál es la prob. de que el equipo funcione más de 50 horas?

hallado en a)

Y: "cant de comp. que funcionan (de un total de 5) más de 50 hs" $Y \sim Bi(5; 0{,}35)$

$$\rightarrow P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}35^0 \cdot 0{,}65^5 = 0{,}8840$$

$$\boxed{P(Y \geq 1) = 0{,}8840}$$

(3) Una de las consecuencias de los faros mal alineados en los automóviles puede ser un efecto reflejantes en las autopistas. Se piensa que más del 50% de los automóviles en circulación tiene faros mal alineados. Si esta afirmación puede sustentarse estadísticamente, se pondrá en marcha un programa de inspección más intenso. Se selecciona una muestra aleatoria de 200 automóviles y se encuentran 120 con los faros mal alineados.

a) Plantee un test de 0,05 si se busca confirmar la necesidad de un programa de inspección más intenso, indicando las hipótesis, el estadístico del test con su distribución y la región crítica

$\alpha = 0{,}05$

$$\underbrace{H_0: p \leq 0.5}_{\text{Si sucede esto} \to \text{no hay cambios}} \quad vs \quad \underbrace{H_1: p > 0.5}_{\text{Si sucede esto} \to \text{programa de inspección más intenso}}$$

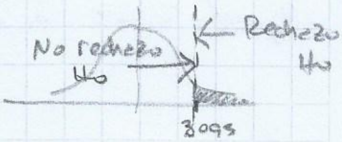
$\hat{p} = \frac{120}{200} = 0{,}6$

$$e_m = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{200}}} = \frac{\hat{p} - 0.5}{0{,}0354} \sim N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

$m = 200$

$1 - \alpha = 0.95$

Rechazo H_0 si $z_{obs} > z_{0.95}$



b) En base a lo observado ¿encuentra evidencias para iniciar un programa de inspección más intenso? Encuentre el p-valor de su conclusión

$$z_{obs} = \frac{0{,}6 - 0{,}5}{0{,}0354} = 2{,}825$$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1{,}645$$

$\therefore z_{obs} > z_{0.95} \;\therefore$ Rechazo H_0

Hay evidencia para iniciar un programa de inspección más intensivo

$z_{obs} = 2{,}825 \to \boxed{p\text{-valor} = 0{,}00236} < \alpha \to$ Rechazo H_0

PyE 18-7-18

④ a) Concepto de coeficiente de determinación de un modelo de regresión lineal. Si se obtuviera un valor del mismo igual a 0,72 ¿cómo lo interpretaría?

$r^2 = \frac{Sxy^2}{Sxx\ Syy}$ Representa el porcentaje de la variabilidad de Y que es explicado por el modelo de regresión lineal en X

Un coef de 0,72 nos indica que hay una relación lineal fuerte entre X e Y

b) ¿para qué sirve realizar el test de hipótesis para la pendiente de la recta de regresión en un modelo lineal?

Se utiliza para corroborar si el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ es válido.

⑤ a) Enunciado del teorema Central del Límite. Mencione una aplicación del teorema en la cuál la variable poblacional no tenga distribución normal.

Sean $X_1, X_2 \ldots X_n$ una sucesión de v.a. independientes e idénticamente distribuidas (iid) tales que $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$

Sea $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ con n suficientemente grande.

Bajo ciertas condiciones generales: $\frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow Z$ con $Z \sim N(0,1)$

• Ejemplo con $X_i \sim \mathcal{U}(-0{,}5\,;\,0{,}5)$, X: "redondeo de un vuelto de una compra"

$Y = \sum_{i=1}^{800} X_i \rightarrow Y \overset{a}{\sim} N(800\mu, \sqrt{800}\,\sigma)$ con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$

b) Concepto de estimador insesgado de un parámetro poblacional

$X \sim N(\mu, \sigma)$

Quiero estimar μ $\Rightarrow$ tomo una muestra y obtengo $\bar{X}$

tomo $\hat{\mu} = \bar{X}$

sesgo $= E(\hat{\mu}) - \mu$ $\rightarrow$ es insesgado si $E(\hat{\mu}) = \mu$